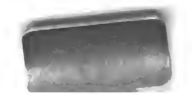
Schell



UEBER

DIE BESTIMMUNG

DER MITTLEREN

DICHTIGKEIT DER ERDE

VON

ANTON SCHELL
PROFESSOR AM BALTISCHEN POLYTECHNICUM ZU RIGA.

MIT DREI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

GOETTINGEN MDCCCLXIX.
DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIV.-BUCHDRUCKEREI.
(W. FR. KAESTNER).

Einleitung.

Sowohl die theoretischen Untersuchungen über die Gestalt der Erde nach den mechanischen Gesetzen des Gleichgewichtes eines um seine Axe rotirenden Körpers mit Rücksicht auf die Abnahme der Schwere nach dem Aequator hin, als auch die zahlreichen Messungen der Pendellängen unter verschiedenen Breiten führen zu der Annahme, dass die Erde nicht gleichförmig dicht sein könne, sondern dass eine Zunahme der Dichtigkeit nach dem Mittelpunkte schon in Folge des Druckes, welchen die über einander liegenden Schichten auf einander ausüben, statt finden müsse. Ausserdem ist sowohl das Innere der Erde als auch die Erdkruste selbst aus verschiedenen Materien zusammengesetzt. In diesem Falle kann man also nur nach einer mittleren Dichtigkeit der Erde fragen, und versteht darunter diejenige, welche man erhält, indem man die Summe der Massen aller in dem Erdkörper enthaltenen Bestandtheile durch das Volumen derselben dividirt.

Sind daher m_1 m_2 m_3 . . . die Massen der Bestandtheile unseres Erdkörpers, und v_1 v_2 v_3 . . . die Volumen derselben, so ist die mittlere Dichtigkeit D der Erde gegeben durch:

$$D = \frac{\Sigma(m)}{\Sigma(v)} = \frac{M}{V}$$

wo M die Masse und V das Volumen des ganzen Erdkörpers bezeichnet.

Die Kenntniss der Dichtigkeit der Erde setzt also die Kenntniss ihrer Masse und ihres Volumens voraus.

Geodätische Messungen in Verbindung mit astronomischen Beobachtungen geben Aufschluss über die Gestalt und Grösse der Erde, und führen auf eine einfache Weise zur Kenntniss ihres Volumens. Nicht so leicht ist die Ermittelung ihrer Masse. Das Attractionsgesetz allein ist es, welches den Weg zeigt, wie man indirect zur Kenntniss der Erdmasse gelangt. Wird nämlich

ein und derselbe Gegenstand gleichzeitig der anziehenden Wirkung der Erde und der eines andern Körpers von bedeutender Masse ausgesetzt, und die Grösse dieser Anziehung gemessen, so erhält man nach dem bekannten Gesetze der allgemeinen Schwere für das Verhältniss der anziehenden Massen den Ausdruck

$$\frac{M}{m} = \frac{A}{a} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

in welchem R und r die Entfernungen der Schwerpunkte der beiden anziehenden Körper von dem angezogenen, und A, a die Werthe dieser Anziehungen bedeuten.

Je nach der Art und Weise, wie die Grössen A und a ermittelt werden, unterscheidet man mehrere Methoden der Dichtigkeitsbestimmung. Loth und Pendel sind die zwei Hauptinstrumente, welche hierbei vorzugsweise in Anwendung kommen. Man sucht die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen entweder aus den Anziehungen, welche grosse Gebirgsmassen auf ein freihängendes Loth oder auf ein in Bewegung befindliches vertikales Pendel ausüben, oder auch aus den Ablenkungen, welche ein horizontal schwingendes Pendel durch einen genäherten Körper von bekannter Masse und Dichtigkeit erfährt.

Von diesen Methoden ist die letztere die sicherste, da sie unabhängig ist von der schwierigen Bestimmung der Dichtigkeit der Mineralien, aus welchen das Gebirge besteht, in dessen Nähe man beobachtet.

Bestimmung der Dichtigkeit der Erde aus der Anziehung grosser Gebirgsmassen.

a. Durch Ablenkung des Bleilothes.

Bekanntlich besitzt das frei aufgehängte Bleiloth, insoferne nicht auf einer Seite derselben hervorragende oder im Innern der Erde ungleichförmig dichte Massen sich befinden, die Eigenschaft, sich stets gegen den Mittelpunkt der als kugelförmig betrachteten Erde zu richten. Ist jedoch letzteres der Fall, so wird die vorhandene Masse ebenfalls anziehend auf das Loth wirken, und eine Ablenkung desselben von der Vertikalen veranlassen. Die Grösse dieser Ablenkung kann durch Verbindung astronomischer und geodätischer

Operationen ausgemittelt werden, und ist abhängig von der Grösse, Gestalt und Dichtigkeit der Erde und der anziehenden Masse. Ist der Zusammenhang dieser Grössen in Form einer Gleichung gegeben, so lässt sich aus derselben die Dichtigkeit der Erde bestimmen.

Von den vielen Versuchen, welche in dieser Richtung durch eine grössere Zahl von Gelehrten angestellt wurden, hat man zur Bestimmung der *mittleren* Dichtigkeit der Erde nur jene benutzt, welche von Maskelyne und Hutton in den Jahren 1774—1776 an der Gränze von Schottland ausgeführt wurden. Maskelyne wählte hiezu mit Vortheil die von Ost nach West sich ausdehnende Bergkette Shehallien in Pertshire, welche auf ein an ihrer Süd- und Nordseite herabhängendes Bleiloth in entgegengesetzter Richtung einwirken musste.

Für die Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde ist es nothwendig, sowohl die Ablenkung des Pendels als auch die diese Ablenkung bewirkenden Kräfte, welche Functionen der Dichtigkeit und der anziehenden Masse sind, kennen zu lernen.

Die Bestimmung der Gesammtablenkung geschah auf folgende Weise. Aus den bekannten Dimensionen des Erdsphäroids und der auf geodätischem Wege ermittelten Entfernung der beiden Beobachtungsstationen M_1 und M_2 in Figur I liess sich die Amplitude $M_1 C M_2 = \psi$ des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogens bestimmen. Es wurden ferner die Zenithdistanzen $Z_1 A_1 S = z_1$ und $Z_2 A_2 S = z_2$ eines Gestirnes S mit Hilfe des an dem Instrumente befindlichen Bleilothes (Libelle) gemessen, und dadurch die durch die Anziehung afficirte Amplitude $A_1 C_1 A_2 = \psi' = z_1 - z_2$ bekannt. Der Unterschied der aus geodätischen Messungen und jenen aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten Amplitude ist, wenn $\sphericalangle M_1 A_1 P_1 = \zeta_1$ und $\sphericalangle M_2 A_2 P_2 = \zeta_2$ gesetzt wird,

$$\Delta\psi = \psi' - \psi = \zeta_1 + \zeta_2$$

d. h. gleich der Summe der Winkel, um welche das Pendel auf beiden Seiten des Berges von der eigentlichen Vertikallinie durch die Anziehung seiner Massen abgelenkt wird.

Bezeichnen g_1 und g_2 die Accelerationen der anziehenden Bergmasse auf der Süd- und Nordseite derselben, d ihre mittlere Dichtigkeit, so kann man setzen:

$$g_1 = \alpha_1 d \text{ und } g_2 = \alpha_2 d$$

wenn α_1 und α_2 Coefficienten bezeichnen, welche vorzugsweise von der Gestalt der anziehenden Masse abhängig sind.

Ist g die Acceleration der Schwere, so ist die Lage des Pendels stets gegeben durch die Diagonale eines Rechteckes, dessen eine Seite vertikal steht, und deren Längen den Grössen g, g_1 und g_2 proportional sind. Man hat alsdann:

$$tg\,\zeta_1 = \text{arc}\,\zeta_1 = \frac{g_1}{g} = \frac{\alpha_1 d}{g}$$

und

$$tg\,\zeta_2 = \text{arc}\,\zeta_2 = \frac{g_2}{g} = \frac{\alpha_2 d}{g}$$

mithin für die Summe der Abweichungen:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\,\frac{d}{g}$$

und mit Berücksichtigung des Einflusses der Schwungkraft auf die Schwere:

$$(\zeta_1 + \zeta_2)\,(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi) = (\alpha_1 + \alpha_2)\,\frac{d}{g}$$

Wird die Erde als kugelförmig angesehen, der Umfang derselben mit U und die mittlere Dichtigkeit mit D bezeichnet, so ist

$$g = \frac{2}{3}\,U\,.\,D$$

Diesen Werth in die vorige Gleichung substituirt giebt:

$$D = \frac{3}{2}\,.\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{U}\,.\,\frac{d}{(\zeta_1 + \zeta_2)\,(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289})} \qquad (1)$$

Nach den Beobachtungen von Maskelyne ist $\zeta_1 + \zeta_2 = 11'',6$, daher:

$$(\zeta_1 + \zeta_2)\,(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}) = \frac{1}{17804}$$

Aus Hutton's Untersuchungen über die Beschaffenheit des Berges ergab sich:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 8811\tfrac{2}{3}.$$

Wird endlich die Länge eines mittleren Grades des Erdsphäroids unter der Breite von 45^0 zu 57007 Toisen angenommen, so folgt:

$$U = 131304390 \text{ Toisen.}$$

Diese Werthe in Gleichung (1) substituirt, geben

$$D = 1{,}7924\,d \qquad (2)$$

Um aus dieser Gleichung D bestimmen zu können, ist die Kenntniss der mittleren Dichtigkeit der verglichenen Masse nothwendig. Hutton setzte anfänglich $d = 2{,}5$, woraus folgt:

$$D = 4{,}481.$$

Nach den genauen Untersuchungen von Playfair ist die mittlere Dichtigkeit des Berges $d = 2{,}75$. Hutton nahm später diesen Werth an, und erhielt:

$$D = 4{,}93.$$

Wenn auch die Art der Messung nichts zu wünschen übrig liess, so bestand die Hauptschwierigkeit in der Ermittelung der mittleren Dichtigkeit der anziehenden Bergmasse.

Playfair untersuchte daher genau die geognostische Beschaffenheit des Berges, die Dichtigkeit der einzelnen Lagerungen und ihre Masse, sowie das Verhältniss ihrer Lage zu den Beobachtungsorten. Er fand, dass der Berg vorzugsweise aus folgenden Felsarten besteht:

1. Aus körnigem Quarze von der mittleren Dichte $d_1 = 2{,}63988$.
2. Aus Glimmer- und Hornblendeschiefer, sowie aus Kalkstein, welche zusammen einer mittleren Dichte $d_2 = 2{,}81039$ entsprachen.

Indem man sich den Berg in reguläre Massen getheilt denkt, welche so viel als möglich gleiche Dichtigkeit besitzen, kann man sich die Grösse der Anziehung jeder einzelnen Masse nach der Richtung einer in der Ebene des Meridians senkrecht auf das Pendel gezogenen Linie denken, wodurch man als Anziehung des ganzen Berges die Summe aller einzelnen Anziehungen erhält.

Sind wie früher g_1 und g_2 die Anziehungen des Berges auf beiden Seiten desselben, so kann man setzen:

$$g_1 = a_1 d_1 + b_1 d_2$$
$$g_2 = a_2 d_1 + b_2 d_2$$

wo a_1, b_1, a_2 und b_2 Zahlen sind, welche von der Gestalt des Berges und der Lage des Pendels abhängen. Für die Summe der Abweichungen ergiebt sich wie früher:

$$(\zeta_1 + \zeta_2)\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right) = \frac{(a_1 + a_2)\, d_1 + (b_1 + b_2)\, d_2}{g}.$$

Da aber:

$$(\zeta_1 + \zeta_2)\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right) = \frac{1}{17804}$$

und

$$g = \tfrac{2}{3} U D,$$

so erhält man durch Substitution:

$$D = 17804 \left\{\frac{a_1 + a_2}{\frac{2}{3}U}\, d_1 + \frac{b_1 + b_2}{\frac{2}{3}U}\, d_2\right\}$$

Die Untersuchungen ergaben:

$$\frac{a_1 + a_2}{\frac{4}{3} U} = +0{,}000158166$$

$$\frac{b_1 + b_2}{\frac{4}{3} U} = -0{,}000057473$$

mithin:

$$D = 2{,}8160\, d_1 - 1{,}0232\, d_2$$

und mit Berücksichtigung der oben von Playfair gefundenen mittleren Dichte der Steinarten:

$$D = 4{,}559.$$

Der Berechnung von $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$ liegt die Annahme zu Grunde, dass das Innere des Berges aus Quarz bestehe. Playfair hat den Werth von D auch für den Fall berechnet, dass der Kern des Berges aus Glimmerschiefer und Kalk bestände, nach welcher Hypothese

$$D = 1{,}0053\, d_1 + 0{,}78743\, d_2$$

und mit Berücksichtigung obiger Werthe von d_1 und d_2

$$D = 4{,}867.$$

Für das arithmetische Mittel beider Werthe ergiebt sich:

$$D = 4{,}713.$$

b. Durch Pendelschwingungen auf hohen Bergen.

Wird ein und dasselbe Pendel an der Oberfläche der Erde, sowie auf dem Gipfel eines Berges in Schwingungen versetzt, so muss die Schwingungszeit an beiden Orten aus zwei Gründen verschieden sein. Erstens wegen der Verschiedenheit der Entfernungen beider Beobachtungsorte vom Mittelpunkte der Erde, und zweitens wegen der Anziehung der Bergmasse, welche auf das Pendel wirkt, und den Gang desselben beschleunigt.

Kennt man die Länge l_0 des Sexagesimalsecundenpendels für die Spitze des Berges, so lässt sich dieselbe auf die Oberfläche des Meeres reduciren mittelst der Formel:

$$l = l_0 \left(1 + \frac{2h}{R}\right), \tag{3}$$

worin h die Meeresfläche der Beobachtungsstation und R den Halbmesser der Erde bezeichnet. Ist für denselben Punkt auf der Oberfläche der Erde auf

irgend eine Weise, welche von der Anziehung des Berges unabhängig ist, z. B. durch Reduction von irgend einem Beobachtungsorte auf den gegebenen, die Länge l' des Sexagesimalsecundenpendels bestimmt, so ist der Unterschied

$$\triangle l = l' - l$$

der Anziehung des Berges zuzuschreiben.

Wird der Ausdruck für die Länge des Sexagesimalsecundenpendels

$$l = \frac{g}{\pi^2}$$

in Bezug auf l und g differenzirt, so erhält man:

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{\triangle g}{g}. \tag{4}$$

Bezeichnet ϱ die mittlere Dichtigkeit des Berges, D jene der Erde und a die Anziehung des Berges für die Dichte gleich 1, so ist:

$$\triangle g = a\varrho$$

und nach dem Früheren

$$g = \tfrac{4}{3}\pi R D.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung erhält man:

$$D = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{l}{\triangle l} \cdot \frac{\varrho}{R} \cdot a. \tag{5}$$

Carlini, welcher im Jahre 1824 hierauf bezügliche Beobachtungen auf dem Mont-Cenis anstellte, betrachtete den Berg als ein sphärisches Segment von der Höhe h und vom Durchmesser d.

Die Anziehung, welche ein derartig gestalteter Berg auf einen Punkt seiner Oberfläche ausübt, kann auf folgende Weise gefunden werden:

Ist in Figur (II) SS_1 eine zur Basis DD_1 des sphärischen Segments parallele Schichte von der Dicke dz, und M ein Massentheilchen in derselben so gelegen, dass $\angle SCM = \theta$, und $MC = r$ ist, ferner $AC = z$ und $AO_1 = h$, so ist das Volumen dieses Massentheilchens $r.d\theta.dr.dz$, und die Grösse der Anziehung auf den Punkt A in der Richtung der Schwere

$$d^3a = \frac{r.d\theta.dr.z.dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

mithin die Anziehung der ganzen Bergmasse:

$$a = \int_0^h z\,dz \int_0^{r_1} \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

wenn r_1 den Halbmesser der kreisförmigen Schichte SS_1 bezeichnet.

Die Integration nach θ und r_1 giebt:

2

$$a = 2\pi\int_0^h z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_1^2}}\right)dz.$$

Bevor die Integration nach z ausgeführt werden kann, muss r_1 als Function von z dargestellt werden. Ist in Figur (III) $O_1S = R$, so folgt aus dem $\triangle O_1CS$

$$r_1{}^2 + z^2 = 2Rz.$$

Dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt, und innerhalb der gegebenen Gränzen integrirt, giebt:

$$a = 2\pi h\left(1 - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{2R}}\right).$$

Ist $DD' = d$ der Durchmesser des sphärischen Segmentes, so ist:

$$R = \frac{d^2 + 4h^2}{8h},$$

mithin:

$$a = 2\pi h\left(1 - \tfrac{4}{3}\cdot\frac{h}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}\right).$$

Dieser Werth in Gleichung (5) substituirt, giebt:

$$D = \frac{3l\varrho h}{2.\triangle l.R}\left(1 - \tfrac{4}{3}\cdot\frac{h}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}\right) \qquad (6)$$

Nach den Beobachtungen, welche Biot zu Bordeaux über die Länge des Secundenpendels angestellt hatte, betrug die auf die Polhöhe des Mont-Cenis ($\varphi = 45^0 14' 10''$) reducirte Länge des Sexagesimalsecundenpendels $l = 993{,}498^{m.m}$. Statt dessen fand Carlini aus directen Beobachtungen am Mont-Cenis $l = 993{,}708^{m.m}$. Es ist sonach die Differenz

$$\triangle l = 0{,}210^{m.m}$$

als Folge der Anziehung des Berges zu betrachten. Letzterer besteht aus Schiefer, Marmor und Gyps, deren Dichte 2,81, 2,86 und 2,32 beträgt. Wird das arithmetische Mittel als mittlere Dichtigkeit der Bergmasse angesehen, so ist

$$\varrho = 2{,}66$$

zu setzen. Für die Dimensionen des Berges und der Erde nimmt Carlini folgende Werthe an:

R = 3437 ital. Meilen
h = 1 „ „
d = 11 „ „

Diese Werthe in Gleichung (6) substituirt geben als mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 4{,}837.$$

c. Durch Pendelschwingungen in tiefen Schächten.

Denkt man sich durch einen innerhalb der Erde gelegenen materiellen Punkt, aus dem Mittelpunkt derselben eine Kugel beschrieben, so kann die ausserhalb derselben befindliche Kugelschale keinerlei Wirkung auf denselben mehr ausüben, da ihre Anziehungen sich gegenseitig aufheben; es bleibt also nur die Anziehung jener Masse übrig, welche in der oben erwähnten Kugel selbst enthalten ist. Es sei in Figur IV

g_o die Acceleration der Schwere an der obern Station M,

g_u „ „ „ „ „ „ untern „ N,

φ die Polhöhe beider Orte,

$h = MN$ die Tiefe des Schachtes,

$R = ON$ der Radius der Erdkugel,

d die mittlere Dichte der Kugelschale,

D „ „ „ „ Erdkugel, welche als mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde angesehen werden kann, da die Kugel sich nur durch eine sehr dünne Schale von der ganzen Erde unterscheidet.

Sowohl die Kugelschale als auch die ganze Kugel wirken auf die an ihrer Oberfläche befindliche Masseneinheit so, als ob ihre gesammte Masse im Mittelpunkte der Erde vereinigt wäre. Es ist sonach:

$$g_o = \tfrac{4}{3}\pi f \frac{[(R+h)^3 - R^3]\, d + R^3 D}{(R+h)^2}$$

oder, mit Vernachlässigung der zweiten und höhern Potenzen von $\frac{h}{R}$,

$$g_o = \tfrac{4}{3}\pi f [3hd + (R-2h) D]$$

und

$$g_u = \tfrac{4}{3}\pi f R D,$$

wo f die Attractions-Constante bezeichnet. Durch Elimination von f folgt:

$$g_u = [1 + \tfrac{h}{R}(2 - 3\tfrac{d}{D})]\, g_o, \tag{7}$$

und hieraus:

$$D = \frac{3d}{2 - \frac{R}{h}(1 - \frac{g_o}{g_u})}. \tag{8}$$

Die Gleichung, welche zur Kenntniss der mittleren Dichtigkeit der Erde führt, bedarf jedoch noch einer Correction wegen der Wirkung, welche die durch die Rotation erzeugte Schwungkraft auf die Beschleunigung an der obern und untern Station ausübt.

Bezeichnen f_o und f_u die an beiden Stationen sich entwickelten Fliehkräfte, so ist:

$$f_o = \frac{g_o}{289} \cos^2\varphi$$

und

$$f_u = \frac{g_u}{289} \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \cos^2\varphi$$

da die Fliehkraft an der untern Station N eben so gross ist, als jene eines Punktes N_1 an der Oberfläche, dessen Polhöhe φ' gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\cos\varphi' = \frac{R}{R+h} \cos\varphi.$$

Die auf das Pendel wirkenden beschleunigenden Kräfte an beiden Stationen sind also:

$$G_o = g_o\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right)$$

und

$$G_u = g_u\left(1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$

Sind z_o und z_u die täglichen Schwingungszahlen eines Pendels an der obern und untern Station, so hat man:

$$z_o^2 : z_u^2 = g_o\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right) : g_u\left(1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)\frac{\cos^2\varphi}{289}\right)$$

und hieraus:

$$\frac{g_o}{g_u} = \left[1 + \frac{2h}{R\left(\frac{289}{\cos\varphi^2} - 1\right)}\right] \frac{z_o^2}{z_u^2}, \tag{9}$$

welcher Werth in Gleichung (8) zu substituiren ist.

Abstrahirt man von dem Einflusse der Schwungkraft auf die Acceleration der Schwere, so ist:

$$z_o^2 : z_u^2 = g_o : g_u,$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (7):

$$z_u = z_o \sqrt{1 + \frac{h}{R}\left(2 - 3\frac{d}{D}\right)}. \tag{10}$$

Discussion.

1. Ist $D = d$, so ist nach Gleichung (10):

$$z_u = z_o \sqrt{1 - \frac{h}{R}}$$

d. h. die tägliche Schwingungszahl eines Pendels an der untern Sta-

tion ist kleiner als an der obern. Ist beispielsweise $\frac{h}{R} = \frac{1}{16000}$, so ist für ein Pendel, das an der obern Station Secunden schlägt, $s_u = 86395{,}68$, mithin die tägliche Retardation 4,32 Secunden.

2. Ist $D < d$ so muss auch

$$s_u < s_0\sqrt{1-\frac{h}{R}}.$$

Wäre also die Dichtigkeit des Erdkerns geringer als die der äussern Schichte, so müsste s_u unter $s_0\sqrt{1-\frac{h}{R}}$ liegen.

3. Ist $D > d$, so muss:

$$s_u > s_0\sqrt{1-\frac{h}{R}}.$$

Wie aus Gleichung (10) ersichtlich ist, wächst mit der Zunahme von D der Werth von s_u, und erreicht für $D = \infty$ ein Maximum. Man erhält hierfür:

$$s_u = s_0\sqrt{1+\frac{2h}{R}}.$$

Für unser obiges Beispiel ist dieser Maximalwerth

$$s_u = 86405{,}39.$$

Es muss also $s_u > 86395{,}68$ und $s_u < 86405{,}39$, d. h. für die angenommene Tiefe $h = \frac{R}{16000}$ kann eine tägliche Differenz von 6 Secunden nie eintreten.

Setzt man in Gleichung (10) $D = \frac{3}{2}d$, so wird $s_u = s_o$, d. h. das Pendel wird sowohl für die obere als untere Station ein Secundenpendel bleiben. Ist $D > \frac{3}{2}d$, so ist auch $s_u > s_o$; ist aber $D < \frac{3}{2}d$, so muss $s_u < s_o$ werden. Das Letztere kann jedoch nie eintreten: denn die bisherigen Erfahrungen haben gezeigt, dass $D > 4{,}5$ und $d < 3$ ist, daher $\frac{d}{D} > \frac{3}{2}$. Der Theorie zufolge muss also der Gang eines unveränderlichen Pendels auch in den tiefsten Gruben immer beschleunigt werden.

Die eben besprochene Methode wurde im Jahre 1826 von M. W. Drobisch in Leipzig, und gleichzeitig von G. B. Airy in England in Vorschlag gebracht, indem letzterer in Verbindung mit Dr. Whewell im Jahre 1826 und 1828 in der Grube Dolewath bei Camborne in Cornwall hierauf bezügliche Versuche anstellte. Leider wurde deren Durchführung das eine Mal durch einen Zufall, das andere Mal durch das Ersaufen der Grube vereitelt, wesshalb Airy und Whewell diese gestörten Versuche keiner genaueren Berechnung

unterwarfen. Beide erkannten schon damals, dass es äusserst schwierig sei, den Gang des obern und untern Pendels mit einander zu vergleichen, und sonach die Genauigkeit in der Bestimmung der Acceleration des untern Pendels Vieles zu wünschen übrig lässt. Nachdem in neuerer Zeit der electrische Telegraph als ein vorzügliches Mittel zur Uhrenvergleichung erkannt wurde, wiederholte Airy im September und Oktober des Jahres 1854 seine Beobachtungen in einem 382,8 Meter tiefen Schachte der Steinkohlengrube von Harton bei Newcastle. Der Operationsplan, die Art der Vergleichung der Uhren, das allgemeine System des Beobachtens der Pendel und des Reducirens der Beobachtungen sind in Phil. Trans. vol. 146, part. I ausführlich beschrieben und erörtert. Das Resultat dieser neuen Beobachtungsreihe war, dass die Beschleunigung eines Secundenpendels am Boden des Schachtes 2,24 Secunden per Tag betrug, mit einer Unsicherheit von weniger als 0,01 Secunden. Da für Harton die Polhöhe $\varphi = 54^0 48'$ und $\frac{h}{R} = \frac{1}{16000}$ ist, so erhält man nach Gleichung (9)

$$\frac{g_o'}{g_u} = 0{,}99994829,$$

welcher Werth in Gleichung (8) substituirt, giebt:

$$D = 2{,}559\, d.$$

Airy suchte jedoch das Verhältniss zwischen der Schwerkraft an der untern und obern Station, ohne Rücksicht auf die Versuche aus einem angenommenen Verhältnisse der Dichte des Gesteines der Grube zu der mittleren Dichtigkeit der Erde zu berechnen. Er fand:

$$\frac{g_u}{g} = 1{,}00012032 - 0{,}00017984 \frac{d}{D}$$

Die Pendelversuche ergaben:

$$\frac{g_u}{g_o} = 1{,}00005185.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält man:

$$D = 2{,}6266\, d.$$

Nach den Untersuchungen von Prof. W. H. Miller, welcher die Dichten der einzelnen Lagen genau untersuchte, ergab sich als mittlere Dichte der Kugelschale $d = 2{,}50$, mithin:

$$D = 6{,}566. \qquad \text{III}$$

Wenn gleich diese Zahl grösser ist, als die vorhergehenden, so glaubt Airy doch, dass das Resultat dieses Versuches wenigstens gleiche Gültigkeit,

wie jenes der andern beanspruchen dürfe, da diese Methode einer nicht unbedeutenden Schärfe fähig ist.

Wird nämlich Gleichung (8) in Bezug auf D und $\left(\frac{g_o}{g_u}\right)$ differenzirt, so erhält man für das Fehlerverhältniss der Dichte:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{D.R}{3dh} \Delta \left(\frac{g_o}{g_u}\right).$$

Der Erfahrung zufolge kann $\frac{D}{d} = 2$ gesetzt werden; ferner ist nach den vorhergehenden Beobachtungen $\frac{h}{R} = \frac{1}{16000}$ und $\Delta\left(\frac{g_o}{g_u}\right) = \frac{1}{432000}$, welcher Werth einen mittleren Fehler von $\pm$ 0,01 Secunden in den beobachteten Schwingungszahlen entspricht. Werden diese Werthe in Gleichung (11) substituirt, so ergiebt sich:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{40}.$$

Samuel Haughton benutzte die von Airy aus Pendelbeobachtungen abgeleiteten Resultate, um sie nach einer einfachen, leicht verständlichen, wenn gleich etwas rohen Methode zu berechnen. Die Hypothese, welche Haughton seiner Berechnung zu Grunde legt, ist folgende: Die Anziehung des Meeres und Landes, welches ausserhalb eines durch den Boden des Schachtes gelegten Sphäroides liegt, weicht nicht merklich ab von der Anziehung einer Schale, die äusserlich von einer ähnlichen Oberfläche begränzt ist, und eine mittlere Dichtigkeit hat, die gleich ist der mittleren Dichtigkeit des ausserhalb des Sphäroids liegenden Meeres und Landes. Bezeichnet nun

D die mittlere Dichtigkeit der gesammten Erde,

δ die mittlere Dichtigkeit desjenigen Theiles, der von dem durch den Boden des Schachtes gehenden Sphäroids eingeschlossen wird,

ϱ die mittlere Dichtigkeit des Landes und Meeres oberhalb des Schachtbodens,

$\frac{h}{R}$ das Verhältniss der Tiefe des Schachtes zum Radius der Erde,

$\frac{g_o}{g_u}$ das Verhältniss der Schwerkräfte an der Oberfläche der Erde und am Boden des Schachtes, welches zu $\frac{19200}{19201}$ gefunden wurde,

so ergiebt sich zunächst die Proportion:

$$g_o : g_u = \tfrac{4}{3}\pi R D : \tfrac{4}{3}\pi (R - h)\delta$$

woraus folgt:

$$\delta = \frac{19201}{19200}\left(1 + \frac{h}{R}\right) D \tag{12}$$

Da ferner die gesammte Masse der Erde gleich ist der Masse des kleineren durch den Boden des Schachtes gelegten Sphäroids, vermehrt um die ausserhalb derselben befindlichen Masse, Land und Meer eingeschlossen, so hat man auch:

$$R^3D = (R-h)^3\delta + [R^3 - (R-h)^3]\varrho$$

und hieraus:

$$D = (1 - \tfrac{3h}{R})\delta + \tfrac{3h}{R}\varrho \qquad (13)$$

Durch Elimination von δ aus Gleichung (12) und (13) folgt:

$$D = \frac{57600\frac{h}{R}\varrho}{38402\frac{h}{R} - 1} \qquad (14)$$

Haughton nimmt für die Tiefe des Schachtes 1260 Fuss englisch, und den Radius der Erde zu 4000 englische Meilen an, woraus $\frac{h}{R} = \frac{1}{16762}$ folgt. Bezeichnet w das Areal des Wassers und l das des Landes, so ist nach Rigaud:

$$l : w = 1 : 2{,}115.$$

Wird die mittlere Dichtigkeit des Landes zu 2,75 angenommen, und bemerkt, dass der Boden des Schachtes 1200 englische Fuss unter dem Meeresspiegel liegt, und nach Humboldt die mittlere Höhe der Continente über dem Meeresspiegel 1000 englische Fuss beträgt, so hat man, wenn Land und Wasser zu einer einzigen Schicht von 1200 englischen Fuss vermischt gedacht und deren mittlere Dichte mit ϱ bezeichnet wird, die Relation,

$$2200 . l . 2{,}75 + 1200 w l = 1200 (w + l) \varrho,$$

aus welcher Gleichung in Verbindung mit der vorhergehenden folgt:

$$\varrho = 2{,}052.$$

Werden für $\frac{h}{R}$ und ϱ die entsprechenden Werthe in Gleichung (14) substituirt, so erhält man:

$$D = 5{,}480, \qquad \text{IV}$$

ein Werth, welcher mit den besten Versuchen sehr gut übereinstimmt.

II. Bestimmung der Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage.

Diese Methode beruht auf der genauen Beobachtungen der Schwingungen eines horizontalen Pendels, welches durch die Anziehungskraft grosser Me-

tallkugel in Bewegung gesetzt wird. Die Einrichtung, welche dem Pendel zuerst von John Michell gegeben wurde, war äusserst einfach. Ein 6 Fuss langer äusserst leichter Arm aus Holz hing in seiner Mitte an einem dünnen 40 Zoll langen Drahte vollkommen horizontal, und trug an jedem der beiden Enden eine Bleikugel von 2 Zoll Durchmesser. Ein enges hölzernes Gehäuse umgab das Ganze, um den Luftzug abzuhalten. Michell wollte auf diese der Einwirkung der Schwere entzogenen Kugeln zwei ausserhalb des Gehäuses befindliche Bleikugeln von 8 Zoll Durchmesser anbringen lassen, welche durch ihre Masse das Pendel in sehr langsame horizontale Schwingungen versetzen sollten. Aus der Amplitude und der Zeit dieser Schwingungen, sowie aus den bekannten Massen und Abständen der Kugeln lässt sich die Anziehung, welche die kleine Kugel von der grossen erfährt, die mittlere Dichtigkeit der Erde berechnen.

Michell konnte mit diesem von ihm erdachten und kurz vor seinem Tode vollendeten Apparate keine Versuche mehr unternehmen. Derselbe kam aus seinem Nachlasse zuerst an Prof. Wollaston zu Cambridge, und von diesem an Cavendich, welcher ihn verbesserte, und eine Reihe von Versuchen damit anstellte. Da die geringste Kraft schon hinreicht, Schwingungen des Pendels zu erzeugen, so müssen alle störenden Einflüsse, insbesonders aber die durch Wärme und Kälte erzeugten, sorgfältigst vermieden werden. Ist eine Seite des Gehäuses wärmer als die andere, so dehnt sich die Luft an jener Seite aus, steigt daselbst in die Höhe, während sie an der andern herabsinkt. Der dadurch entstehende Luftstrom, oft schon durch die Annäherung des Beobachters hervorgebracht, bringt den Arm bereits merklich aus seiner Ruhelage heraus. Aus dieser Ursache schloss Cavendich seinen verbesserten Apparat in ein eigenes Zimmer ein, das beständig verschlossen blieb, beobachtete den Stand des Armes von aussen durch ein Fernrohr, und verband die Bleimassen mit einem Mechanismus, vermittelst dessen sie sich von aussen bewegen liessen.

Cavendich suchte auch die Fehler zu verbessern, welche von dem Trägheitsmomente des Wagbalkens, von der Anziehung der Bleimassen auf letzterem, von der Anziehung der Wände des Gehäuses etc. herrühren. Durch eine grössere Zahl sehr übereinstimmender Versuche, welche er vom 5. Au-

gust 1797 bis 23. Mai 1798 anstellte, fand er die mittlere Dichtigkeit der Erde = 5,48.

Im Jahre 1837 stellte Prof. F. Reich in Freiburg Versuche mittelst eines ähnlichen jedoch auf mancherlei Weise abgeänderten Apparates an, welcher in einem leerstehenden Keller des dortigen Bergakademie-Gebäudes aufgestellt wurde. Eine wesentliche Verbesserung des Apparates erzielte er dadurch, dass er ihn mit einer Poggendorff'schen Spiegelvorrichtung versah, wodurch es möglich wurde, die geringsten Winkelbewegungen des horizontalen Pendels mit grosser Genauigkeit und Leichtigkeit ausserhalb der luftdicht verschlossenen Thüre des Kellerraumes wahrzunehmen. Fig. (V) stellt einen ungefähr von Süd nach Nord gerichteten Durchschnitt des Kellerraumes und des Apparates, und Fig. (VI) den entsprechenden Grundriss dar. An ein in der Mitte der Decke gut befestigtes Holzstück A ist ein um eine vertikale Axe drehbares Messingstück angeschraubt, das oben ein gezahntes Rad trägt, in welches eine Schraube ohne Ende eingereift, welche durch den bis vor die Thür verlängerten Eisenstab B beliebig gedreht werden kann.

Der an dem Messingstücke befestigte übersilberte Kupferdraht C hat eine Länge von 1212$^{\text{mm.}}$ und einen Durchmesser von 0.4$^{\text{mm.}}$, und ist an dem untern Ende durch eine Klemmschraube mit dem Messingwerke D in Verbindung, welches sowohl zum Träger des Spiegels als auch zur Aufnahme des horizontalen Armes E bestimmt war. In diesem aus astfreien Fichtenholze verfertigten Arme befanden sich 4 stählerne Spitzen α_1 α_2 β_1 u. β_2, von denen die beiden äussern 2001,7$^{\text{mm.}}$, die beiden innern 1000,5$^{\text{mm.}}$ von einander abstanden. Die beiden äussern Spitzen dienten zur Aufnahme messingener Bügel, an welche mittelst eines dünnen Drahtes die beiden Kugeln K_1 und K_2 aufgehängt waren. Die Mittelpunkte derselben lagen 770$^{\text{mm.}}$ unter dem Mittel des Armes in gleicher Entfernung mit den beiden Spitzen. Die Kugeln bestanden aus einer Composition von Zinn, Wismuth und etwas Blei.

Das mittlere Gewicht einer Kugel betrug 484,213 Gramm.
" " " eines Bügels " 2,075 "
" " " des Drahtes " 0,148 "

Der ganze Apparat war in einem Gehäuse von Fichtenholze eingeschlossen, und die Wand desselben nur an einigen Stellen durchbrochen, und zwar der horizontale Kasten an seiner ganzen obern Seite, ferner bei s_1 um mit dem

Fernrohre nach einer Mire sehen, bei s_2 um den Abstand der beiden Drähte messen, und bei s_3 um zu den Kugeln gelangen zu können. Sämmtliche Oeffnungen wurden wieder durch Platten von Spiegelglas geschlossen, durch welche man den Hebel und seine Oscillationen beobachen konnte. In den Seitenwänden des horizontalen Kastens befanden sich in der Höhe des Armes 4 Schrauben *S*, nahe an beiden Enden und paarweise einander gegenüber stehend, wovon die beiden nördlichen zur Begränzung der Schwingungen des Armes, die südlichen aber zur Feststellung derselben dienten. Das vor der Thür befindliche Fernrohr *F* war nach dem Spiegel *G* gerichtet, in welchem man die mittelst des Hohlspiegels *H* von der ausserhalb stehenden Lampe *L* erleuchtete Scala *M* erblicken konnte. Letztere war in Millimeter getheilt, enthielt 110 Theilstriche und hatte eine solche Entfernung vom Spiegel, dass einer jeden in demselben beobachtete Millimeteränderung des Standes des Armes, eine Bewegung des Schwerpunktes der Kugel von $\frac{1}{9{,}0383}^{\text{mm.}}$ entsprach. Als ablenkende Massen wurden zwei grössere Kugeln von Blei angewendet, welche mit messingenen Henkeln versehen waren, und mittelst starker Messingdrähte an den Kloben *N* hingen, deren Räder auf horizontalen eisernen Schienen liefen, und mit zwei Paaren daran befestigten Schnüren von aussen hin und hergezogen werden konnten. Das Gewicht einer jeden bleiernen Masse betrug 45006 Grm.; das specifische Gewicht der ersten 10,9255 und jenes der zweiten 10,9865. Ferner betrug:

Die Länge des Drahtes	1820mm.
Die Mitte des Klobens vom Mittelpunkte der Masse	2080 „
Die Entfernung des untern Drahtendes vom Mittelpunkte der Masse	105 „
Der Durchmesser des Drahtes	3,8 „
Das Gewicht des Klobens	2090 Gramm
Das Gewicht des Drahtes	184,8 „

An dem Holzpflocke *O* konnte ein mit einem Niveau versehenes Diopter auf und nieder bewegt werden, um sich mit demselben zu überzeugen, ob die Mittelpunkte der Kugeln, und jene der genäherten Massen in einer horizontalen Ebene liegen. Die um den Apparat stehenden am Boden und an der Decke befestigten vertikalen Balken *P*, dienten theils zur Befestigung der

eisernen Laufschienen, theils zur Anbringung dreier horizontaler Bretter Q_1 Q_2 und Q_3. Die Bretter Q_1 dienten zur Befestigung eines mit einem beweglichen Diopter versehenen Lineals, welches die Messung der Entfernung des Mittelpunktes der Kugel und jene der genäherten Masse ermöglichte. Die Bretter Q_2 trugen 2 Latten, welche parallel der Länge des Gehäuses liefen, und die Bestimmung hatten, die Massen vor dem Anschlagen an die Wände des Gehäuses zu schützen. Die Bretter Q_3 waren dazu bestimmt, eine eiserne Platte aufzunehmen, welche zwei convergirende vorn mit Holzklappen versehene Schrauben enthielt, mittelst welcher die Axen der die Masse und Kugel tragenden Drähte genau in eine auf die Richtung des Armes normalen Vertikalebene gebracht werden können.

Theorie des Apparates.

Es sei:

Q das absolute Gewicht der Erde,
M „ „ „ der anziehenden kugelförmigen Masse,
m „ „ „ der angezogenen Kugeln,
R der Halbmesser der Erde,
E die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln,
K die Anziehung, welche die Kugel m von M erfährt,
ω das Gewicht einer Volumseinheit Wasser.

Man hat zunächst:

$$K : m = \frac{M}{E^2} : \frac{Q}{R^2}$$

und

$$Q = \tfrac{4}{3} \pi R^3 \omega D$$

mithin:

$$D = \frac{3 M m}{4 \pi R \omega E^2 K} \tag{15}$$

In dieser Gleichung sind alle Grössen bis auf K als bekannt anzusehen. Das Resultat, das mit der Drehwage erreicht werden soll, besteht nun darin, die Grösse der Anziehung zu ermitteln, welche die an dem Wagebalken hängende Kugel von der ablenkenden Masse erleidet. Wird der Wagebalken in Folge dieser Anziehung aus der Gleichgewichtslage gebracht, so erleidet der Draht seiner ganzen Länge nach eine Torsion, in Folge welcher er ein Bestreben äussert, die Kugel wieder in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen.

Dieses wird auch sofort erfolgen, und der Wagebalken wird eine pendelartige Bewegung annehmen, sobald die anziehende Masse entfernt wird. Innerhalb der Gränzen der Elasticität ist das Bestreben des Drahtes, seine ursprüngliche Form wieder anzunehmen, stets gleich der Wirkung jener Kraft, welche die Formveränderung hervorgebracht hat.

Coulomb, welcher zuerst die Torsionskraft näher studirte, hat durch Versuche nachgewiesen, dass die Drehungsmomente der Kräfte, welche den Wagebalken um verschiedene Winkel drehen, den Drehungswinkeln proportional sind. Bezeichnet daher $\mathfrak{M}$ das aus der Torsionskraft resultirende Drehungsmoment, α den Torsionswinkel und C eine Constante, so ist

$$\mathfrak{M} = C\alpha.$$

Nach einem bekannten Satze der Mechanik ist die Acceleration γ der Winkelgeschwindigkeit eines um eine feste Axe rotirenden starren Körpers in jedem Augenblicke gleich dem Drehungsmomente der äussern Kräfte dividirt durch sein Trägheitsmoment T in Bezug auf die Drehaxe. Es ist also:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{M}}{T} = \frac{C\alpha}{T}.$$

Für einen Punkt des Wagebalkens in der Entfernung r von der vertikalen Drehungsaxe ist der Bogen der Ablenkung $A = r\,\alpha$, und die beschleunigende Kraft:

$$g_1 = r\gamma = \frac{CA}{T}.$$

Diese Kraft ist es nun, welche den Wagebalken in seine ursprüngliche Ruhelage zurückzuführen, und demselben eine pendelartige Bewegung zu ertheilen sucht. Die Schwingungszeit N dieses horizontalen Pendels von der Länge r ist gegeben durch den Ausdruck:

$$N = \pi\sqrt{\frac{r}{r\frac{C}{T}}} = \pi\sqrt{\frac{T}{C}}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{C}{T} = \frac{\pi^2}{N^2}$$

und durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$g_1 = \frac{\pi^2 A}{N^2}. \qquad (16)$$

Ist nun q die in Gewichten ausgedrückte abzulenkende Masse und K die Kraft, ebenfalls in Gewichten ausgedrückt, welche auf den Wagebalken wirkt, und der ablenkenden Kraft gleich ist, so hat man:

$$K : q = g_1 : g$$

oder

$$K = \frac{g_1}{g} q.$$

Ist ferner l die Länge des Secundenpendels für den Beobachtungsort, so ist:

$$g = \pi^2 l$$

mithin:

$$K = \frac{A}{N^2 l} q. \tag{17}$$

Der Bogen A wird durch Ablenkung $ab = B$ in Fig. (VII) an der im Spiegel S gesehenen Scala gemessen. Ist die horizontale Entfernung der Scala vom Spiegel $= e$, ferner $> SCs = \alpha$, so ist bekanntlich $> aCb = \beta = 2\alpha$, mithin:

$$B = 2\, e \sin \alpha = 2\, e \frac{A}{r}$$

daher auch

$$A = \frac{Br}{2e}. \tag{18}$$

Die abzulenkende Masse q besteht aus 3 Theilen:

1. Aus den beiden an den Armenden hängenden Kugeln $2m$.
2. Aus den die Kugeln tragenden Drähten und ihren Bügeln $2m_1$, und
3. Aus der auf die Aufhängepunkte der Kugeln reducirten Masse des Armes $2m_2$.

Die Massen m und m_1 sind unmittelbar durch ihre Gewichte gegeben, die Bestimmung von m_2 geschah auf folgende Weise: Es wurden Gewichte von der Grösse der Kugeln, ihres Drahtes und Bügels erst an die äussern, dann an die innern Stifte des Armes, d. i. in den Entfernungen a_1 und a_2 angehängt, und die Schwingungszeiten N_1 und N_2 beobachtet Nach dem Vorhergehenden hat man:

$$N_1 = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \sqrt{m_2 a_2^2 + (m + m_1)\, a_1^2}$$

und

$$N_2 = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \sqrt{m_2 a_2^2 + (m + m_1)\, a_2^2}$$

Durch Elimination von C folgt:

$$m_2 = \frac{N_2^2 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 N_1^2}{N_1^2 - N_2^2} (m + m_1). \tag{19}$$

Aus je zwei Versuchsreihen ergab sich:

$$N_1 = 406{,}502 \text{ Secunden}$$
$$N_2 = 221{,}458 \quad \text{,,}$$

Setzt man ferner:

$$m + m_1 = 486{,}428 \text{ Gramm}$$

$$a_1 = 2001{,}7 \text{ Millimeter}$$
$$a_2 = 1000{,}5 \quad \text{„}$$

so erhält man:

$$m_2 = 32{,}491 \text{ Gramm.}$$

Wird in Gleichung (17) für A der Werth aus Gl. (18) substituirt, und für $q = 2\,(m + m_1 + m_2)$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$K = \frac{Br}{2\,e\,N^2\,l}\,(m + m_1 + m_2)$$

und durch Substitution in Gl. (15):

$$D = \frac{3\,m\,M\,e\,l}{4\,\pi\,R\,r\,\omega\,(m + m_1 + m_2)} \cdot \frac{N^2}{B\,E^2} = \alpha\,\frac{N^2}{B\,E^2}. \tag{20}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden constanten Grössen sind:

$$M = 45006 \text{ Gramm}$$
$$m = 484{,}213 \quad \text{„}$$
$$m_1 = 2{,}223 \quad \text{„}$$
$$m_2 = 32{,}491 \quad \text{„}$$
$$\omega = 0{,}001 \quad \text{„}$$
$$r = 1000{,}85 \text{ Millimeter}$$
$$e = 4523{,}00 \quad \text{„}$$

und für die Polhöhe $\varphi = 50^0\,55'$ und 400 Meter Meereshöhe:

$$l = 993{,}95 \text{ Millimeter}$$
$$R = 6364624000 \quad \text{„}$$

Die Berechnung des constanten Coefficienten gibt für den Ausdruck der Dichtigkeit der Erde:

$$D = 7{,}075568\,\frac{N^2}{B\,E^2} \tag{21}$$

Correctionen.

Der in Gl. (20) vorkommende Coefficient bedarf noch einiger Correctionen und zwar:

1 Wegen der Kraft, womit die Masse den Arm, den Bügel, den die Kugel tragenden Draht, und die zweite entferntere Kugel anzieht. Jede Hälfte des Armes Fig. (VIII) bildete eine abgestumpfte Pyramide, deren Basis ein Rechteck war.

Die durchaus gleiche Breite des Querschnittes betrug . $b = 10{,}4^{\text{mm.}}$

Die Höhe desselben an beiden Enden . . . . . . $h_1 = 12{,}0^{mm}$
„ „ „ in der Mitte . . . . $h_2 = 33{,}0$ „
Die Länge des ganzen Armes . . . . $2l = 2019$ „
Das Gewicht im feuchten Zustande . . . . $G_1 = 217$ Grm.
Es folgt hieraus
für den Querschnitt im Mittel . . . . $q = \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) b$
„ „ „ in der Entfernung x . . . . . $q_x = \left(\frac{h_1 l + h_2 x}{l}\right) b$
für das Gewicht von $1^{mm.}$ Länge —. . . . . $g_x = \left(\frac{h_1 l + h_2 x}{h_1 + h_2}\right) G_1$
„ „ „ eines Elementes $g_x\, dx$.

a. Um die Anziehung zu erfahren, welche die Masse auf den Arm des Wagebalkens ausübt, denke man sich durch den Mittelpunkt K der Kugel eine vertikale Ebene AMK gelegt, welche senkrecht auf dem Arme AB steht, und durch den Mittelpunkt der Masse geht. Bezeichnet nun $AM = a$ die Entfernung des Mittelpunktes der Masse von der mittleren Höhe des Armes, ferner $KM = b$ die Entfernung des Mittelpunktes der Masse von dem Mittelpunkte der Kugel, so lässt sich die in dem Punkte X senkrecht auf den Arm wirkende Componente der Anziehung ausdrücken durch:

$$dX = \frac{b g_x dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{b G_1}{(h_1 + h_2)} \left\{\frac{h_1 l + h_2 x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} dx$$

und auf den Anfangspunkt A reducirt:

$$dA = \frac{l-x}{l}\; d\,X = \frac{b G_1}{l(h_1 + h_2)} \left\{\frac{h_1 l + h_2 x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} (l-x)\, dx.$$

Ist dK_1 das Gewicht, welches man für das Element des Armes im Mittelpunkte der Kugel zu substituiren hat, welches dieselbe Wirkung in Bezug auf die Drehung des Armes ausübt, wie jene des angezogenen Elementes, so ist:

$$dK_1 = b^2\, dA = \frac{b^3 G_1}{l(h_1 + h_2)} \left\{\frac{h_1 l + h_2 x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} (l - x)\, dx$$

und für den halben Arm:

$$K_1 = \frac{b^3 G_1}{l(h_1 + h_2)} \int_0^l \left\{\frac{h_1 l^2 + (h_2 - h_1) l x - h_2 x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} dx$$

das ist:

$$K_1 = \frac{G_1 b^3}{h_1 + h_2}\left\{\frac{h_1}{\sqrt{a^2+l^2}}\left(1 - \frac{\sqrt{a^2+l^2}}{a}\right) + \frac{h_1 l}{a_2}\right) + h_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l}\, log\, n \,\text{et}\, \frac{l+\sqrt{a^2+l^2}}{l}\right)\right\}$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die früher angegebenen Werthe ferner für

$$a = 790,055^{m.m}$$
$$b = 176,882$$

so erhält man

$$K_1 = 0,3636 \text{ Gramme.}$$

Die Anziehung der Masse auf die entferntere Hälfte des Armes ist so gering, dass sie völlig vernachlässigt werden kann.

b. Das Gewicht G_2 des Bügels befand sich in dem Abstande a von der anziehenden Masse; und ist daher für denselben in dem Mittelpunkt der Kugel ein Gewicht K_2 zu substituiren von der Grösse

$$K_2 = \frac{b^3}{a^3}\, G_2$$

Setzt man für $G_2 = 2{,}075$ Gramm, so erhält man

$$K_2 = 0{,}0233 \text{ Gramm.}$$

c. Die Länge λ_1 des Drahtes, woran die Kugel hing, betrug $720^{m.m}$ und das Gewicht desselben $G_3 = 0{,}148$ Gramm, wobei angenommen wurde, dass derselbe bis zum Mittelpunkte der Kugel reichte. Es folgt hieraus für das Gewicht eines Elementes $\frac{G_3}{\lambda_1}\, dx$, und für das Gewicht K_3, welches man in den Mittelpunkt der Kugel zu substituiren hat.

$$K_3 = \frac{G_3 b^3}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1} \frac{dx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G_3\, b}{\sqrt{b^2+\lambda_1^2}}$$

Werden die früher angegebenen Werthe in diese Gleichung gesetzt, so erhält man

$$K_3 = 0{,}0353 \text{ Gramm.}$$

d. Ist $\varepsilon = 2001{,}7^{m.m.}$ die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln, und K_4 das aus dem Mittelpunkte der nähern Kugel zu entfernende Gewicht, so ist, wenn das Gesammtgewicht der letztern mit K bezeichnet wird,

$$K_4 = \frac{K b}{(b^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Da $K = 484{,}213$ Gramm betrug, so folgt hieraus

$$K_4 = 0{,}3292 \text{ Gramm.}$$

Es ist daher das Gewicht der Kugel um die Gewichte $K_1 + K_2 + K_3 - K_4 = 0{,}0930$ Gramm zu vermehren, welches 0,00019 der ganzen Wirkung auf die nähere Kugel beträgt.

2 Wegen der Anziehung des die Masse tragenden Drahtes und des Kolbens auf die Kugel.

e. Ist G_4 das Gewicht des die Masse tragenden Drahtes, λ_1 die Länge desselben, λ_2 der Abstand des untern Endes vom Mittelpunkte der Masse, so ist das in dem letztern zu substituirende Gewicht zur Hervorbringung gleicher Anziehung

$$K_5 = \frac{G_4 b^2}{\lambda_1} \int_{\lambda_2}^{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G_4 b}{\lambda_1} \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2}} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{b^2 + \lambda_2^2}} \right\}$$

Es war:

$$G_4 = 184{,}8 \text{ Gramm}$$
$$\lambda_1 = 1820 \text{ m.m}$$
$$\lambda_2 = 105 \text{ m.m}$$

woraus folgt

$$K_5 = 8{,}717 \text{ Gramm.}$$

f. Da der Kolben N vom Gewichte $G_5 = 2090$ Gramm in einer Höhe $h = 2080$ m.m über dem Mittelpunkte der Masse sich befand, so übt derselbe auf die Kugel eine Anziehung aus, welche einem in dem Mittelpunkte der Masse vorhandenen Gewichte entspricht von der Grösse

$$K_6 = \frac{G_5 b^3}{(h^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Für die oben angegebenen Werthe erhält man

$$K_6 = 1{,}271 \text{ Gramm.}$$

Zufolge dieser Correction hat man die Masse um $K_5 + K_6 = 9{,}988$ Gramm, oder um 0,00022 des Ganzen zu vermehren.

3 Wegen der Anziehung der beiden auf die Bewegungsrichtung der Kugel normalen Wände des Gehäuses auf die Kugel.

Befindet sich die Kugel K in Fig. (IX) bei entfernter Masse genau in der Mitte des Gehäuses, so wird dieselbe gleich stark nach entgegengesetzter Richtung angezogen; wird jedoch die Masse aus dieser indifferenten Lage in

die genäherte gebracht, so wird dadurch die Kugel um die Grösse A der einen Wand genähert, und von der andern um dieselbe Grösse entfernt, so dass, wenn $MN = 2d$ gesetzt wird, $MK = d - A$ und $NK = d + A$ ist. Für die Berechnung der Anziehung wurde nur ein Theil der beiden Wände berücksichtigt, welcher ebenso weit unter als über die Kugel hinausreicht, da die tiefern Theile theils zu entfernt und zu schief wirkten, theils in dem Sandboden des Kellers steckten, der als gleichförmige Masse betrachtet wurde.

Es sei nun in Fig. (IX):
$Aa = 2a$ $AD = 2b$, $AB = c$, $MK = \varepsilon$, und der Kürze halber $\varepsilon + c = h$, so ist nach Mollweide die Anziehung T dieses rechtwinkeligen Parallelepipeds für die Entfernung $= 1$ durch den Ausdruck gegeben

$$4h \text{ arc sin } \frac{ab}{\sqrt{(a^2+h^2)(b^2+h^2)}} - 4\,d \text{ arc sin } \frac{ab}{\sqrt{(a^2+\varepsilon^2)(b^2+\varepsilon^2)}}$$
$$+ 4\,a \log \text{nat} \frac{(b+\sqrt{a^2+b^2+\varepsilon^2})(\sqrt{a^2+h^2})}{(b+\sqrt{a^2+b^2+h^2})(\sqrt{a^2+\varepsilon^2})} + 4\,b \log \text{nat} \frac{(a+\sqrt{a^2+b^2+\varepsilon^2})(\sqrt{b^2+h^2})}{(a+\sqrt{a^2+b^2+h^2})(\sqrt{b^2+\varepsilon^2})}$$

Die Dimensionen der Wände waren:

$a = 64$ m.m
$b = 51$ „
$c = 17$ „
$d = 48$ „
im Mittel $A = 0{,}77$ m.m

Setzt man in die vorhergehende Formel zuerst $\varepsilon = d - A = 47{,}23$ m.m und $h = \varepsilon + c = 64{,}23$ m.m, sodann $\varepsilon = d + A = 48{,}77$ m.m, und $h = \varepsilon + c = 65{,}77$ m.m; so erhält man, wenn man beide Ausdrücke mit dem Gewichte von 1 cub. m.m nassen Fichtenholzes $= 0{,}0005$ Gramm multiplicirt

für die Anziehung der genäherten Wand $= 0{,}018252$ Gr.
„ „ „ „ entfernteren „ $= 0{,}017856$ „

und auf die mittlere Entfernung der Masse $= 176{,}882$ m.m reducirt, für die Anziehung

der genäherten Wand . . . . 571,07 Gramm
der entfernteren Wand . . . . . . 558,66 „

Es bleibt also nach der Seite der Masse hin eine Anziehung von 12,41 Gramm oder 0,00027 des Ganzen übrig.

Um den verbesserten Dichtigkeitscoefficienten zu erhalten, hat man in

4*

Gleich. (20) für die Masse $M = (1 + 0{,}00068)\ 45006 = 45031$ Gramm zu substituiren. Die Substitution ergibt für die Berechnung der mittleren Dichtigkeit der Erde den verbesserten Ausdruck

$$D = 7{,}079499\ \frac{N^2}{BE^2} \tag{22}$$

Sowie der Dichtigkeitscoefficient durch die genäherten Massen eine Aenderung erfuhr, so bedarf auch die Schwingungszeit N einer Correction, und zwar:

1 Wegen der Veränderlichkeit der Anziehung durch die genäherte Masse.

Es sei in Fig. (X) M der Mittelpunkt der anziehenden Masse, OA die Ruhelage des Armes bei entfernter, und OB jene bei genäherter Masse. Im letztern Falle steht die Anziehungskraft K der Masse mit der Torsionskraft T des Drahtes im Gleichgewichte. Bezeichnen a und b zwei constante Grössen, ferner arc. $AB = aA$ und $MB = \varepsilon$, so ist

$$K = \frac{b}{\varepsilon^2} \text{ und } T = a \, . A$$

mithin durch Gleichsetzung beider Werthe

$$b = a \, . A \, . \ \varepsilon^2.$$

Ist nun OC irgend eine Lage des schwingenden Armes, $BC = x$, so ist die Kraft K_1 mit welcher der Arm nach der Masse hingezogen wird,

$$K_1 = a\ (A + x) - \frac{b}{(\varepsilon - x)^2}$$

und mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung

$$K_1 = ax \left\{ 1 - \frac{(2\varepsilon - x)}{(\varepsilon - x)^2} A \right\}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die Anziehung des Armes in der Lage OD, wenn $BD = y$ gesetzt wird, den Ausdruck

$$K_2 = ay \left\{ 1 - \frac{(2\varepsilon - y)}{(\varepsilon + y)^2} A \right\}$$

Da die Grössen x und y im Vergleiche zu ε als sehr klein zu betrachten sind, so kann man auch schreiben

$$K_1 = ax\ (1 - \frac{2A}{\varepsilon})$$

und

$$K_2 = ay\ (1 - \frac{2A}{\varepsilon})$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Kraft, womit der Arm nach der Gleichgewichtslage hingezogen wird, sich in dem Verhältnisse $1 : (1 - \frac{2A}{\varepsilon})$ verringert. Ist daher N die beobachtete und N_1 die verbesserte Schwingungszeit, so hat man

$$N_1 : N = \sqrt{1 - \frac{2A}{\varepsilon}} : 1$$

und mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\frac{A}{\varepsilon}$

$$N_1 = N\left(1 - \frac{A}{\varepsilon}\right).$$

Substituirt man für A den Werth aus Gl. (18) so erhält man:

$$N_1 = N\left(1 - \frac{Br}{2e\varepsilon}\right).$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$r = 1000{,}85^{\text{mm.}}$$
$$e = 4523{,}00 \;\text{„}$$

Es sind ferner die mittleren Werthe von:

$$B = \quad 6{,}8293^{\text{mm.}}$$
$$\varepsilon = 176{,}882 \;\text{„}$$

mithin:

$$N_1 = 0{,}99578\ N \tag{23}$$

d. h. die bei genäherter Wand beobachtete Schwingungszeit ist um 0,0043 ihrer Grösse zu vermindern.

2. Wegen der Anziehung des Gehäuses auf die Kugeln.

Dem früher Gesagten zufolge hat man in dem Mittelpunkte der Masse statt der Anziehung einer Wand bei

47,23 mm. Entfernung . . . . 571,07 Gramm.
48,77 „ „ . . . . 558,66 „

also im Mittel für jede Wand 564,86 Gramm zu substituiren. Da auf jede Kugel beide Wände in demselben Sinne wirken, so hat man in den Mittelpunkt der Masse $4 \times 564{,}86 = 2259{,}44$ Grm. zu setzen. Da aber 45006 Grm. eine Correction von 0,0043 in der Schwingungszeit erforderlich machen, so bedürfen 2260 Grm. eine Correction von 0,0002, d. h. die verbesserte Schwingungszeit ist für diesen Fall:

$$N_2 = (1 - 0{,}0002)\ N = 0{,}9998\ N. \tag{24}$$

3. Wegen des Uhrganges.

Die Uhr, welche bei den Versuchen verwendet wurde, zeigte eine tägliche Retardation von 58,8 Secunden gegen mittlere Zeit. Hieraus folgt, dass die beobachtete Schwingungszeit um 0,0007 ihres Werthes zu vermehren ist, um die richtige Zeit zu erhalten. Es ist also

$$N_3 = 1{,}0007\ N. \tag{25}$$

Werden diese 3 Correctionen berücksichtigt, so hat man für die verbesserte

Schwingungszeit bei genäherter Masse

$$N_0 = (1 - 0{,}00427 - 0{,}0002 + 0{,}0007)\ N = 0{,}99623\ N \qquad (26)$$

und bei entfernter Masse:

$$N_0{}^1 = (1 - 0{,}0002 + 0{,}0007)\ N = 1{,}0005\ N. \qquad (27)$$

Die nachstehende Tabelle enthält die Resultate aus 14 Versuchen, bei welchen jedesmal nur Eine der Bleimassen zur Wirkung gebracht wurde.

Nr.	Datum 1837	Lage der östl. Masse	Lage der westl. Masse	N corrigirt Secunden	E Millimet.	B Scalentheile	Dichte	Zahl der Beob.
1	10. Juni	südlich		404,717	170,155	7,1652	5,5967	5
2	12. „	„		403,324	173,185	6,9375	5,5346	3
3	22. „	nördlich		403,001	180,128	6,2250	5,6926	4
4	3. Juli	„		409,366	178,965	6,9563	5,3249	4
5	5. „	„		409,331	177,520	6,8500	5,4950	5
6	15. „	„	nördlich	408,911	168,585	7,7412	5,3804	3
7	15. „	„	„	409,287	172,048	7,4740	5,3605	4
8	18. „	„	„	409,596	167,827	7,7375	5,4506	2
9	18. „	„	„	407,696	168,073	7,6375	5,4542	6
10	24. „	„	südlich	407,195	190,120	6,0656	5,3540	4
11	26. „	„	„	408,680	187,449	6,0625	5,5507	4
12	26. „	„	„	408,374	189,422	6,3666	5,1683	6
13	27. „	„	„	408,667	188,572	6,1584	5,3991	3
14	30. „	„	„	408,418	186,260	6,2417	5,4534	4

Aus diesen Versuchen ergibt sich, insoferne die Beobachtungszahlen als Gewichte derselben betrachtet werden, der wahrscheinlichste Werth für die mittlere Dichtigkeit der Erde

$$D = 5{,}43$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler

$$\triangle\ D = \pm\ 0{,}0233.$$

Am 14. August desselben Jahres wurde anstatt der westlichen Bleimasse eine Gusseisenmasse benutzt, deren Gewicht 30021 Grm. betrug, und 6 Beobachtungen auf der nördlichen Seite angestellt, welche den Werth $D = 5{,}45$ ergaben, woraus folgt, dass die Anziehung des Eisens von jener des Bleies nicht verschieden ist, und daher etwaige magnetische Erscheinungen nicht stattgefunden haben.

Das obige Resultat ist noch um diejenige Grösse zu vermehren, um

welche die Schwungkraft der Erde die Schwerkraft vermindert. Ist φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, so ist die corrigirte mittlere Dichtigkeit der Erde

$$D_0 = \left(1 + \frac{\cos^2 \varphi}{289}\right) D.$$

Für Freiberg ist $\varphi = 50^0 55'$, mithin:

$$D_0 = 5{,}437 = 5{,}44. \qquad (V)$$

F. Baily wiederholte bald darauf die Versuche von Cavendish und Reich, und erweiterte dieselben zugleich durch Abänderung der Grösse und Substanz der angezogenen Kugeln durch Ermittlung des Einflusses verschiedener Aufhängeweisen und durch Anwendung bedeutender Temperaturunterschiede. Die Versuche stellte er in seinem eigenen Hause an, welches abgesondert von jedem andern Gebäude in einem grossen Garten in einiger Entfernung von der Strasse sich befand. Das den Apparat tragende Gestelle war, um jede Erschütterung zu vermeiden, von der Decke getragen, ohne mit dem Fussboden in Verbindung zu stehen.

Der von Baily benutzte Apparat, welcher wohl im Allgemeinen jenem von Cavendish und Reich ähnlich war, unterschied sich doch in einigen Punkten von demselben.

Baily liess die Massen von einem auf den Boden stehenden und um eine Axe drehbaren Gestelle tragen, und die kleinen Kugeln an den Enden des Torsionsbalkens anschrauben, so dass sie einen unverrückbaren Theil desselben ausmachten. Um einen etwaigen Einfluss der Substanz auf das Resultat zu ermitteln, wurden Kugeln von Platin, Blei, Zink, Messing, Glas und Elfenbein angewendet. Die Aufhängeweise war ebenfalls verschieden. Es wurden successive Drähte von Eisen, Kupfer und Messing nebst Seidenfäden nicht nur unifilar sondern auch bfiilar angewendet. Die Torsionskraft variirt bekanntlich mit der Substanz, Grösse und Länge des Drahtes, und ist im Allgemeinen für einen und denselben Draht als constant zu betrachten, was für ein Gewicht auch daran gehängt sei. Aus den Resultaten der verschiedenen Versuche ging hervor, dass einfache Drähte von verschiedenen Durchmessern geringe Unterschiede liefern; dagegen ergaben sich widersprechendsten Resultate, wenn die die doppelten Aufhängefäden von Seide sind. Diese Anomatien entspringen nach Baily daraus, dass nicht alle Fasern, aus denen die Strähne bestehen, bei successivem Anheften der verschiedenen Kugeln an die Torsionswage gleich-

mässig ausgestreckt werden, somit auf diese ungleiche Kräfte wirken, die eine Abweichung in den Resultaten hervorbringen. Auch Temperaturveränderungen wurden zuweilen dadurch hervorgebracht, dass man auf beiden Seiten in der Nähe der Kugeln oder an der Seite des Torsionskastens Weingeist spritzte, oder die Kugeln erwärmte, oder endlich Eismassen in Anwendung brachte. Das Gewicht einer jeden der grossen Kugeln (Massen) betrug im Mittel 380,5 Pfund Avoir du poids.

Baily bemerkte unter vielen andern Anomalien, dass während eines und desselben Versuches der Schwingungsbogen selten so regelmässig abnahm, als es eigentlich der Fall sein sollte, ja häufig sogar zunahm. Lange konnte Baily sich die Ursache dieser Anomalie nicht erklären, bis er endlich von Prof. Forbes auf die Wärmestrahlung der Massen aufmerksam gemacht wurde. Um den Effect derselben zu entfernen, liess er die Massen vergolden, und den Torsionskasten überall mit dickem Flanell bekleiden. Die unmittelbar darauf angestellten Versuche überzeugten ihn, dass dadurch wirklich eine der hauptsächlichsten Fehlerquellen beseitigt wurde.

Die Zahl der von Baily mit diesem verbesserten Apparate angestellten Versuche beläuft sich im Ganzen auf 2153.

In der nachstehenden Tabelle sind die mit verschiedenen Kugeln bei verschiedenen Aufhängeweisen erhaltenen Resultaten zusammengestellt.

Substanz der Kugeln	Durchm. Zoll	Dopp. Seidenf.		Dopp. Draht		Einf. Draht	
		Zahl der Versuche	Dichte	Zahl der Versuche	Dichte	Zahl der Versuche	Dichte
Blei	2,5	148	5,60	130	5,62	57	5,58
Blei	2,0	218	5,65	145	5,66	162	5,59
Platin	1,5	89	5,66			86	5,56
Messing	2,5	46	5,72			92	5,60
Zink	2,0	162	5,73	20	5,68	40	5,61
Glas	2,0	158	5,78	170	5,71		
Elfenbein	2,0	99	5,82	162	5,70	20	5,79

Legt man jedem der Versuche gleiches Gewicht bei, was bei Versuchen, die auf so verschiedene Weise angestellt wurden, wohl nicht recht statthaft ist, da selbst Baily bemerkte, dass einige derselben mehr Zutrauen verdienen als andere, ja einige derselben vielleicht sogar verwerflich sein dürften, so

ergibt sich aus den 2004 Versuchen als mittlere Dichtigkeit der Erde

$$D = 5{,}67. \qquad \text{(VII)}$$

Nach Veröffentlichung dieses Resultates wiederholte auch Reich seine Versuche, nachdem er ebenfalls einige Verbesserungen an seinem Apparate angebracht hatte. Er liess auf Anrathen Forbes das hölzerne, die Drehwage umgebende Gehäuse äusserlich und innerlich mit Staniol bekleiden, um dasselbe gegen äussere Temperaturdifferenzen weniger empfindlich zu machen, und jede Spur von Electricitätsentwicklung an einzelnen Stellen zu beseitigen. Ferner wurde der dicke Draht, der die Masse trug und dessen Gegenwart eine nicht unbeträchtliche Correction erforderlich machte, beseitigt, und anstatt dessen die Masse auf eine Art Drehscheibe gelegt, welche die Kugel und ihr Gehäuse umgibt, so dass bei einer Aenderung der Lage der Masse kein anderer Körper seine Anziehung auf die Kugel ändern konnte.

Mit den bereits früher benutzten Bleimassen und Kugeln stellte Reich drei Versuchsreihen an, und zwar: die erste mit einem 0,5mm. dicken und 2270mm. langen Kupferdraht; die zweite mit einem 0,4mm. dicken und 620mm. langen Kupferdraht, und die dritte mit einem 2270mm. langen bifilaren Eisendraht, der unten 4,2mm. und oben 5mm. Abstand hatte.

Die Resultate dieser Versuche sind in folgender Tabelle enthalten.

	Versuchsreihe	
I	II	III
5,5948	5,5953	5,3468
5,4390	5,7860	5,4487
5,7114	5,3127	5,7235
5,4406	5,5767	5,5102
5,5270	5,5471	5,5539
5,5587	5,5245	5,7192
5,3773	5,5734	5,7233
5,5237	5,5772	5,6360
5,5933	5,7574	5,4957
5,6216	5,7442	5,7034
5,5470	5,6176	5,7936
5,5177	5,4817	5,7326
5,6880	5,5847	5,5248
5,6046	5,5157	5,7639
5,6149	5,7812	5,4751

Versuchsreihe		
I	II	III
5,5681	5,6016	5,5333
5,4715	5,5770	5,5080
5,2067	5,5793	5,6469
5,7452	5,9935	5,6304
5,5737	5,6369	5,4411
5,6211	5,4581	5,3913
5,5334	5,6910	5,5886
5,6423	5,6806	5,7647
5,5237	5,6214	5,5282

Aus diesen drei Versuchsreihen ergibt sich als Hauptmittel für die Dichtigkeit der Erde

$$D = 5{,}5832 \qquad \text{(VIII)}$$

Da die erste Reihe ziemlich differente Resultate zeigte, wurden die Versuche mit einem dünnern und kürzern Draht wiederholt, um einerseits eine vollkommnere Spannung des Drahtes zu erzielen, andererseits die Schwingungszeit zu verkürzen; die Zahlen der zweiten Versuchsreihe jedoch beweisen, dass dadurch die stärkeren Differenzen nicht beseitigt wurden. Die bifilare Aufhängung hat insoferne einen Vorzug, als der Arm schon in der kürzesten Zeit eine constante Lage einzunehmen sucht; allein die Differenzen der Torsionskraft zeigten sich beträchtlicher, so dass es auch mit der bifilaren Aufhängung nicht gelang, besser übereinstimmende Resultate zu erhalten.

Reich glaubte anfänglich, dass diese Versuche durch geringe magnetische oder diamagnetische Einwirkungen zwischen Masse und Kugel gestört, und dadurch die Resultate unrichtig gemacht werden. Allein die Versuche, welche er mit einer diamagnetischen Wismuthkugel und einer magnetischen Eisenkugel anstellte, lehrten, dass wenn auch letztere vermöge ihrer abstossenden Wirkung auf die diamagnetische Bleimasse einen grössern Werth ($D = 5{,}6887$) der Dichtigkeit ergab, es doch sehr unwahrscheinlich ist, dass zwischen der bei den Hauptversuchen angewendeten Kugel und Bleimasse eine merkliche Wirkung dieser Art nicht vorhanden war.

Genauigkeit dieser Methode.

Wie die Gleichung (20) zeigt, hängt die Genauigkeit des Werthes der mittleren Dichte von der Sicherheit in der Bestimmung der vier Factoren α, N, B, ε ab. Die den Coefficienten α bestimmenden Grössen lassen sich alle bis auf m'' mit grosser Schärfe ermitteln. Obgleich ein Fehler in der Bestimmung der letztern nicht ganz ohne Einfluss auf die zu bestimmende Dichte ist, so wollen wir doch bei der folgenden Untersuchung α als fehlerfrei betrachten, und nur den Einfluss untersuchen, welchen eine Ungenauigkeit in der Bestimmung von N, E und B auf die mittlere Dichte hervorbringt. Sind ΔN, ΔE und ΔB die mittleren Fehler dieser Grössen, so ist nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate das Fehlerverhältniss der Dichte:

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \sqrt{\frac{4\,\Delta N^2}{N^2} + \frac{4\Delta E^2}{E^2} + \frac{\Delta B^2}{B^2}} \tag{28}$$

Eine kurze Betrachtung der Schwingungszahlen in der vorhergehenden Tabelle zeigt, dass dieselben nicht unbeträchtlich variiren. Auch Cavendish fand solche Unregelmässigkeiten in den Schwingungszahlen, welche wahrscheinlich ihren Grund in der Veränderlichkeit der Torsionskraft des Aufhängedrahtes haben dürften. Es ist daher nicht rathsam, die Schwingungszeit der Drehwage für sich ein für allemal, sondern Schwingungsdauer und Ablenkung gleichzeitig zu bestimmen, da nur in diesem Falle brauchbare Resultate erhalten werden können. Die Versuche bestätigten dieses, indem beinahe durchgehends einer grössern Schwingungszeit auch eine grössere Ablenkung entsprach.

Nichts desto weniger zeigten sich zuweilen grössere Anomalien in der Schwingungszeit, deren Ursache bis jetzt noch nicht aufgefunden werden konnte, und desshalb Hutton zu der Bemerkung veranlassten, dass ein so feiner und zusammengesetzter Apparat an sich keine absolute Genauigkeit geben könne. Trotzdem glaubt Reich annehmen zu dürfen, dass der Fehler ΔN in der Bestimmung der Schwingungszeit die Grösse von 1 Secunde kaum übersteigen dürfte.

Die grösste Abweichung bei der Ermittlung von E betrug $0{,}34^{\text{mm}}$, so dass die Annahme $\Delta E = 0{,}5^{\text{mm}}$ nicht ungerechtfertigt erscheint. Einen be-

trächtlichen Einfluss auf D übt ein Fehler in der Bestimmung der Ablenkung. Wenngleich die Beobachtungen für ΔB höchstens 0,1 ergaben, so dürfte diese Annahme doch zu gering sein, da wie die Erfahrung lehrte, der Arm während der Zeit einer Beobachtung häufig seinen Stand änderte, woran ohne Zweifel ganz geringe Erschütterungen oder Luftströmungen die Schuld sein dürften.

Nimmt man für N, E und B aus obiger Tabelle die Mittelwerthe

$$N = 407{,}611\,;\; E = 178{,}451\,;\; B = 6{,}829$$

so erhält man aus Gleichung (28)

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{61}.$$

Legt man den mit der Drehwage erhaltenen Werthen von Cavendish, Reich und Baily gleiche Gewichte bei, so erhält man als mittleren Werth für die Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}54$$

und

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{55}.$$

Die geringe Uebereinstimmung der mittelst der Drehwage angestellten Beobachtungen veranlassten Poggendorff zu der Frage, ob denn überhaupt die mittlere Dichtigkeit der Erde genau bestimmt werden könne. Er äussert sich hierüber folgendermassen: „So wenig strenge genommen, die allgemeine Gestalt der Erde ermittelt werden kann, sobald sie nicht die eines Sphäroides ist, sowenig lässt sich die mittlere Dichtigkeit unsers Planeten genau bestimmen, sobald derselbe nicht schon eine gleichförmige Dichtigkeit besitzt. Die Voraussetzung einer Gleichförmigkeit der Dichte bildet die Grundlage, auf welcher aus den Versuchen mit der Torsionswage, wie aus denen mit dem Pendel die Resultate hergeleitet werden; sie ist aber bekanntlich unrichtig, und eine andere aufzustellen sind wir in unserer Unkunde über die Zuhname der Dichte mit der Tiefe bisher nicht vermögend gewesen. Vielleicht wird es in der Zukunft gelingen; bis dahin können aber nothwendig alle Bestimmungen der mittleren Dichtigkeit des Erdkörpers, wie sorgfältig sie auch von experimenteller Seite ausgeführt sein mögen, nur ungewisse Annäherungen zur Wahrheit liefern. Dieser Einwurf ist nach Mädler insofern nicht ganz richtig als bei den vorhergehenden Untersuchungen nur die Gesammtanziehung der Erde zur Vergleichung kommt, und es ganz gleichgültig ist, wie die Massen

im Innern der Erde auch vertheilt sein mögen, wenn nur der physische Schwerpunkt mit dem geometrischen zusammenfällt. Die vorhergehenden Betrachtungen über den Einfluss der Beobachtungsresultate auf die daraus abgeleitete mittlere Dichtigkeit rechtfertigen dieses auch insoferne, als bei der angenommenen Grösse der einzelnen Beobachtungsfehler ein genaueres Endresultat kaum erwartet werden darf.

Resultate und Folgerungen.

Fassen wir die nach den zwei wesentlich von einander verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate zusammen, so ergeben sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde folgende Werthe:

Shehallien:

Der mittlere Werth von Playfair 4,713

Mont-Cenis:

Beobachtungen von Carlini 4,837

Kohlenschacht von Harton:

Beobachtungen von Airy 6,566

Nach Haughton's besonderer Berechnung 5,48

Drehwage:

Versuche von Cavendish 5,48

„ „ Reich (1838) 5,44

„ „ Baily (1842) 5,66

„ „ Reich (1847—1850) 5,58

Wenn gleich die auf so verschiedene Weise abgeleiteten Werthe der mittleren Dichtigkeit der Erde nur als Annäherungen an die Wahrheit zu betrachten sind, so reichen dieselben doch hin zur Begründung mancher sehr wichtigen Folgerungen über die innere Beschaffenheit unsers Planeten. Wenn man die einzelnen Substanzen, aus welchen unsere Erdrinde zusammengesetzt ist, in Bezug auf ihre Dichtigkeit mit der mittleren Dichtigkeit des ganzen Erdballs vergleicht, so findet man, dass letztere die Dichtigkeit aller uns bekannten Substanzen, die Metalle ausgenommen da sie in zu geringer Menge gefunden werden, bei weitem übertrifft, woraus folgt, dass das Innere der Erde aus Körpern von grösserer

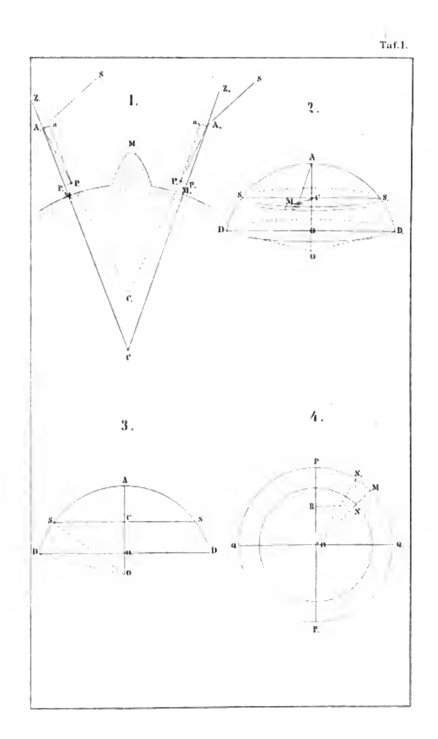
Dichte bestehen müsse, oder dass die Erde einen metallischen Kern besitze. Da die obigen Versuche ungefähr eine Dichte von 5 ergaben, und nach der Natur der Gebirgsschichten, welche den trockenen, continentalen Theil der Erdoberfläche bilden, die Dichte derselben kaum 2,7, und die Dichte der trockenen und oceanischen Oberfläche zusammen kaum 1,6 beträgt, so können wir wohl mit Sicherheit annehmen, dass die mittlere Dichtigkeit des Erdkerns die Dichtigkeit der schweren Gebirgsmassen, welche an der Oberfläche am häufigsten vorkommen, wenigstens um die Hälfte übertrifft.

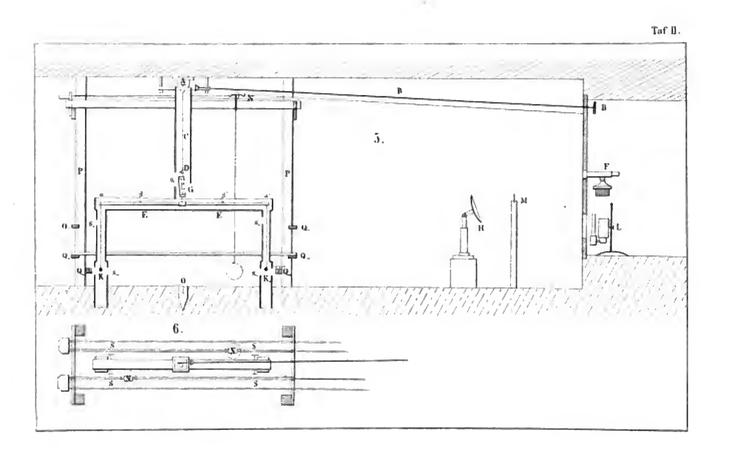
Ueber die geognostische Beschaffenheit des Erdinnern, sowie über die Ursache der Zuname der Dichtigkeit wurden von Geologen und Physikern verschiedene Hypothesen aufgestellt, welche grösstentheils nur als ein Spiel der Phantasie zu betrachten sind, und zum Theil auch wohl begründeten Thatsachen oder längst anerkannten Naturgesetzen widersprechen. Es ist als sicher anzunehmen, dass die Dichtigkeit der Erde ebenso wie ihre Gestalt im innigen Zusammenhange steht mit den Kräften, die sie beleben. Die durch zahlreiche Messungen nachgewiesene Abplattung der Erde, welche nur als Folge der auf eine rotirende Masse einwirkenden Schwungkraft zu betrachten ist, offenbart den frühern Zustand unsers Planeten. Nachdem derjenige Theil der Sonnenatmosphäre, welcher zur Bildung der Erde sich vereinigt hatte, seinen Lauf um die Sonne angetreten und zugleich eine Axendrehung erhalten hatte, musste der Process der Erstarrung von der Oberfläche der Erde aus durch Strahlung gegen den kalten Himmelsraum beginnen. Da die Metalle zu ihrem gasförmigen Zustande eine grössere Hitze erfordern, so mussten dieselben früher in eine tropfbar flüssige Masse übergehen, und vermöge ihrer grössern Dichtigkeit sich dem Mittelpunkte der Erde nähern, und so den dichtern Erdkern bilden. Diese Annahme bestätigen auch die Untersuchungen, welche Clairaut, d'Alembert, Legendre, Laplace und Ivory über das Gleichgewicht eines flüssigen um seine Axe rotirenden Körpers angestellt hatten. Aus den Untersuchungen der beiden letztern über das Verhältniss der Abplattung zur Schwungkraft folgt, dass weder eine gleichförmige Dichtigkeit vom Mittelpunkte der Erde bis zur Oberfläche anzunehmen sei, noch dass die Schwere in einem einzigen Punkte vereinigt sein könne, weil im ersten Falle die Abplattung genau $5/4$ der Schwungkraft, und im letzten $1/2$ derselben betragen müsse. Da nun die aus Grad- und Pendelmessungen berechnete Abplattung zwischen beide fällt, so kann

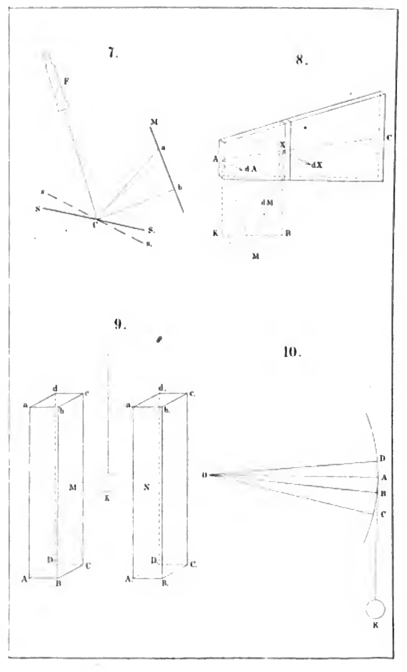
nach Laplace mit Sicherheit angenommen werden, dass in Gemässheit der den Quadraten der Sinuse der Breiten proportionalen Zuname der Schwere, eine regelmässige Lagerung der einzelnen elliptisch sphäroidischen Schichten von ungleicher Dichtigkeit um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beim flüssigen Zustande der Erde erfolgt sei. Die zunehmende Dichtigkeit der Erde vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche findet ihre Erklärung zum Theile auch in dem Drucke, welchen die obern Schichten auf die untern ausüben. Legendre, Laplace und Ivory nehmen an, dass die Vermehrung des Druckes dem Quadrate der dadurch erzeugten Dichtigkeit proportional ist. Unter dieser Vermuthung fand Ivory für die Abplattung der Erde $= \frac{1}{289}$ übereinstimmend mit den Messungen Sabine's. Wird die mittlere Dichtigkeit der Erdoberfläche zu 2,83 angenommen, so ergibt sich für die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde 5,48, welches Resultat mit den Beobachtungen am Berge Shehallien übereinstimmt.

Es ist daher höchst wahrscheinlich, dass unser Planet aus ellipsoidisch gestalteten und verschieden abgeplatteten, regelmässig aufeinander folgenden Schichten besteht, welche zum Theile durch Heterogenität der Stoffe zum Theil auch durch Druck eine grössere Dichtigkeit gegen den Mittelpunkt der Erde erhalten haben.

Taf. I.




Taf II.
5.
6.


7.
F
M
a
b
s
S
C
S,
s,
8.
X
C
A
x
dA
dX
dM
K
B
M
9.
d
c
a
b
M
K
D
A
B
C
d.
c.
a
b.
N
D.
C.
A.
B.
10.
O
D
A
B
C
K



